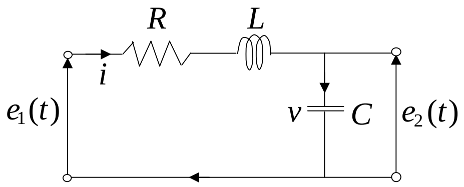
自動制御 (a) 試験問題 -担当 井村-

2006 年 2 月 7 日

[1] 下図の電気回路に対して，状態ベクトルを適当に選び，その状態方程式を導出せよ．ただし，v はコンデンサの両端の電圧，i は回路を流れる電流，R は抵抗値，L はインダクタンス，C はコンデンサ容量であり，電圧 e_1 を入力，電圧 e_2 を出力とする．



[2] 2 入力 1 出力の 3 次元非線形システム

$$\dot{x} = f(x,u), \quad y = h(x),$$

$$f(x,u) = \begin{bmatrix} -x_1 + x_3 + x_2^2 + u_2 \\ 3\cos x_1 + x_1 + u_1 \cos x_1 \\ -x_2 + u_1 \sin x_1 \end{bmatrix}, \quad h(x) = \sin x_1, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

に対して，つぎの問いに答えよ．

(i) 平衡状態が $x_s = [0\ 0\ 0]^T$ で与えられているとする．このとき，平衡入力 $u_s = [u_{1s}\ u_{2s}]^T$ を求めよ．

(ii) (i) で求めた平衡点に対して，近似線形化し，線形の状態方程式を導出せよ．この状態ベクトル，入力ベクトルとして，$\bar{x} = x - x_s, \quad \bar{u} = u - u_s$ を用いよ．

[3] システム

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & c \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0]$$

に対して，つぎの問いに答えよ．

(i) 可制御かつ可観測であるための a,b,c の条件を求めよ．

(ii) 可制御性の定義を簡単に述べよ．

(iii) $u = 0$, $a = -1$, $b = 1$ とする．このとき，システムが漸近安定であるための c の条件をリアプノフの安定定理から求めよ．

(iv) $a = 1$, $b = 1$ のとき，システムは可制御である．そこで，このシステムを状態フィードバック $u = Kx$ によって安定化したい．このときの閉ループ系が安定であるためのフィードバックゲイン K の条件を求めよ．

(v) $a = 1$, $b = 1$ で，出力 y のみ観測できるものとし，上記のシステムに対して同一次元オブザーバを設計したい．同一次元オブザーバの状態を $\hat{x}$ とおくとき，誤差 $e = x - \hat{x}$ に関する状態方程式を求めよ．また，その極が $-2 \pm 3i$ となるように同一次元オブザーバを設計せよ．

(vi) $a = 0$, $b = 1$ とする．このとき，下記の評価関数を最小にする最適レギュレータ則を求めよ．

$$J = \int_0^\infty (x^T \tilde{C}^T \tilde{C} x + u^2) dt, \quad \tilde{C} = [0 \ \ 1]$$

自動制御 (a) 試験問題解答 -担当 井村-　　　　　　　2006 年 2 月 7 日

（結果：受験者 43 名，最高 99 点，平均点 79.0 点）

[1] (配点 10 点)
$x = [x_1\ x_2]^T = [i\ v]^T$, $u = e_1$, $y = e_2$ とおくと次式となる．

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad y = [0\ \ 1]x$$

[2]
(i)（配点 10 点）$f(x_s, u_s) = 0$ より，$u_s = [-3\ 0]^T$.
(ii) (配点 15 点）

$$\dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \end{bmatrix} \bar{x} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \bar{u}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \bar{x}$$

[3]
(i) (配点 10 点) ランク条件より $a \neq 0$, $b \neq 0$.
(ii) (配点 10 点) 任意に与えられた初期状態から有限時間で原点に到達できる入力が存在するとき，システムは可制御であるという．
(iii) (配点 10 点) $P = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix}$ とし，$PA + A^TP = -2I$ を解くと，$p_1 = -(c^2+2)/c$, $p_2 = -1$, $p_3 = -2/c$ を得る．これが正定であることと $c < 0$ は等価である．
(iv) (配点 12 点) $K = [k_1\ \ k_2]$ とおくと，$\det(sI - (A + BK)) = s^2 - k_1 s + (k_1 c - k_2 - 1)$ である．よって安定であるための条件は，$k_1 < 0$, $k_1 c - k_2 - 1 > 0$ である．
(v) (配点 13 点) $A - GC$ の極が $-2 \pm 3i$ となるように G を設計すればよい．望みの特性多項式は $(s-(-2+3i))(s-(-2-3i)) = s^2+4s+13$ である．一方，$G = [g_1\ \ g_2]^T$ とおくと，$\det(sI-(A-GC)) = s^2 + (g_1 - c)s + (g_2 - 1 - g_1 c)$ である．よって $G = [4 + c\ \ 14 + (4 + c)c]^T$ を得る．こうして，オブザーバは次式で与えられる．

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + G\{y(t) - C\hat{x}(t)\}$$

(vi) (配点 10 点) $P = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix}$ とおくと $PA + A^TP - PBB^TP + \tilde{C}^T\tilde{C} = 0$ より，$2p_2 - p_1^2 = 0$, $p_3 + cp_2 - p_1 p_2 = 0$, $p_2^2 + 2cp_3 + 1 = 0$ を得る．これを満たす実正定解を用いて，$u = -B^TPx$ とすればよい．