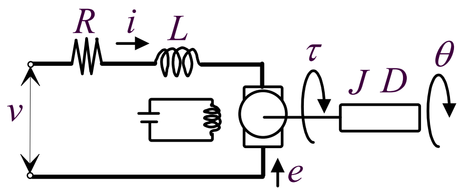
自動制御 (a) 試験問題 -担当 井村-

2007 年 2 月 13 日

[1] 下図に示すように，端子電圧 $v(t)$ により直流サーボモータの回転角度 $\theta(t)$ を制御するシステムを考える．このとき，この系の関係式は $J\ddot{\theta} + D\dot{\theta} = Ki$, $v = Ri + L\frac{di}{dt} + H\dot{\theta}$ で与えられるものとする．ここで，$i(t)$ は電機子電流，R, L はそれぞれ電機子回路の抵抗，インダクタンス，J, D はそれぞれロータの慣性モーメント，粘性摩擦，K, H は適当な定数である．以下の問いに答えよ．

(i) 入力 u を端子電圧 v，出力 y をモータの回転角度 θ とする状態方程式 $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx$ を導け．

(ii) $J = D = K = R = L = H = 1$ とする．この系の可観測性を判別せよ．



[2] 可制御かつ可観測なシステム

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

に対して，つぎの問いに答えよ．

(i) $u = 0$ としたシステムの安定性をリアプノフの安定定理により判別せよ．

(ii) このシステムの解 $x(t)$ は $x(t) = e^{At}x(0) + (\quad\quad)$ で与えられる．(　) 内を A, B を使って埋めよ．

(iii) 状態フィードバックを使って，このシステムを $x = x_s$ で安定化したい．つぎの問いに答えよ．

(a) 平衡点 (x_s, u_s, y_s) が満たすべき条件を求めよ．ただし，$x_s = [x_{1s}\ x_{2s}]^T$ とする．

(b) $\bar{x}(t) := x(t) - x_s$，$\bar{u}(t) := u(t) - u_s$ とし，状態方程式 $\dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}\bar{u}$ を考える．このとき，$\bar{A}$, $\bar{B}$ を求めよ．

(c) (b) のシステムに対して状態フィードバック $\bar{u} = K\bar{x}$ による安定化を考える．安定化する状態フィードバックゲイン K の条件を求めよ．

(iv) オブザーバ $\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + G(y - C\hat{x})$ を考える．このとき，つぎの問いに答えよ．

(a) 推定誤差を $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ とする．このとき，推定誤差に対する状態方程式を求めよ．

(b) (a) で求めた状態方程式の極が $-2 \pm i$ となるように G を設計せよ．

[3] システム $\dot{x} = f(x, u)$, $f(x, u) := ax + x^3 + bu$ (a, b は定数) に対してつぎの問いに答えよ．

(i) 平衡点を $(x_s, u_s) = (0, 0)$ とする．この平衡点に対して近似線形化し，線形の状態方程式を求めよ．ただし，$\bar{x} = x - x_s$, $\bar{u} = u - u_s$ とする．

(ii) 得られた線形システムに対して，つぎの評価関数 (r は実正数) を最小にする最適レギュレータ則を求めよ．

$$J(\bar{u}) = \int_0^\infty \{\bar{x}^2(t) + r\bar{u}^2(t)\}dt$$

(iii) (ii) で求めた最適レギュレータを用いた閉ループ系の極は，r を小さくするとどうなるかを考えることによって評価関数における r の役割を述べよ．

自動制御 (a) 試験問題解答 -担当 井村-　　　　　　2007 年 2 月 13 日

（結果：受験者 43 名，最高 98 点，平均点 69.2 点）

[1] （配点 15 点）

(i) (配点 10 点) $x = [x_1 \ x_2]^T = [\theta \ \dot{\theta} \ i]^T$, $u = v$, $y = \theta$ とおくと次式となる．

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{D}{J} & -\frac{K}{J} \\ 0 & -\frac{H}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} u, \quad y = [1 \ \ 0 \ \ 0]x$$

(ii) (配点 5 点) $rank \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = 3.$　よって可観測である．

[2] （配点 60 点）

(i)（配点 10 点）$PA + A^T P = -I$ により $P = \begin{bmatrix} 9/8 & -1/4 \\ -1/4 & 1 \end{bmatrix} > 0$ を得る．よって安定である．

(ii)（配点 10 点）$\int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau.$

(iii)

(a) （配点 8 点）$Ax_s + Bu_s = 0$, $y_s = Cx_s$ より，$u_s = 2x_{2s}$, $x_{1s} = (-1/2)x_{2s}$, $y_s = x_{1s} + x_{2s}$.

(b) （配点 8 点）$\bar{A} = A$, $\bar{B} = B$.

(c) （配点 8 点）$K = [k_1 \ k_2]$ とおくと，$\det(sI - A - BK) = s^2 - (k_1 + k_2 - 1)s + k_1 - 2k_2 + 4 = 0$ を得る．よって $k_1 + k_2 - 1 < 0$, $k_1 - 2k_2 + 4 > 0$.

(iv)

(a) （配点 8 点）$\dot{e} = (A + GC)e$.

(b) （配点 8 点）$G = [3 \ 1]^T$.

[3]（配点 25 点）

(i) （配点 5 点）$\dot{\bar{x}} = a\bar{x} + b\bar{u}$.

(ii)（配点 10 点）$b = 0$ のとき，不可制御なので問題から除外してよい．$b \neq 0$ とすると，スカラなので可制御，可観測である．そこでリカッチ代数方程式は $2ap - r^{-1}b^2p^2 + 1 = 0$ であり

$$p_+ = \frac{a + \sqrt{a^2 + r^{-1}b^2}}{r^{-1}b^2}, \quad p_- = \frac{a - \sqrt{a^2 + r^{-1}b^2}}{r^{-1}b^2}$$

を得る．明らかに $p_+ > 0$ なので，最適制御入力は $\bar{u} = -r^{-1}bp_+\bar{x}$ である．

(iii) (配点 10 点) 閉ループ系は $\dot{\bar{x}} = (a - br^{-1}bp_+)\bar{x} = -\sqrt{a^2 + r^{-1}b^2}\bar{x}$ であり，極は実数 $-\sqrt{a^2 + r^{-1}b^2}$ であり，r が小さいほど，極の実部は負のままで，その絶対値が大きくなる．よって r が小さいほど，評価関数における状態の評価が大きくなり，システムの速応性が高くなる．