動的システム基礎　試験問題 -担当 井村-

2009 年 8 月 3 日

[1] 図 1 のシステムの運動方程式をラグランジュの運動方程式を使って導け．ただし，リンクの先の質量を m_1，リンクの長さを l，ロータの慣性モーメントおよび質量を I_2，m_2 とし，リンクとロータはばね定数 k のばね（回転方向のみ作用）により連結されており，リンクおよびロータの水平状態からの回転角をそれぞれ θ_1，θ_2 とする．また，ロータにはトルク τ が加わるものとする．なおリンクの質量，慣性モーメントは無視するものとする．

[2] 運動方程式

$$\ddot{q}_1 + q_1^3 = 0,\ \dot{q}_1 + \dot{q}_2 = v$$

に対して，以下の問いに答えよ．

(1) 入力を $u = v$, 出力を $y = q$ とする．このとき，状態ベクトルを適当に定め，非線形状態方程式 $\dot{x} = f(x,u)$, $y = h(x,u)$ を求めよ．
(2) このシステムの平衡点 (x_s, u_s, y_s) の満たすべき条件を求めよ．
(3) 平衡点 (x_s, u_s, y_s) のまわりで近似線形化した状態方程式を求めよ．ただし，記号 x_s, u_s, y_s はこのまま用いてよい．また $\tilde{x} = x - x_s$, $\tilde{u} = u - u_s$, $\tilde{y} = y - y_s$ とする．

[3] つぎの事柄について簡単に説明せよ．

(1) 動的システムと静的システムの相違
(2) 伝達関数の定義において初期値を 0 とする理由

[4] 伝達関数が

$$G(s) = \frac{1}{as^2 + bs + c}$$

であるシステム $y = G(s)u$ を考える．つぎの問いに答えよ．

(1) $a = 0$ とし，１次遅れ系を考える．このシステムの時定数とゲインを求めよ．またこれらの用語の意味を単位ステップ応答の概略図を用いて簡単に説明せよ．
(2) $a = 1$, $b = 3$, $c = 2$ とする．このシステムのステップ応答を求めよ．また減衰係数，自然角周波数，ゲインを求めよ．

[5] 図 2 のフィードバック系のブロック線図に対して，つぎの問いに答えよ．ただし各伝達関数を次式とする．

$$A(s) = \frac{1}{s+2}, \quad B(s) = \frac{2}{s^2 + 2s + 1}, \quad C(s) = k$$

(1) $z = A(s)e$ に対応する状態方程式を状態ベクトルを適当に定めて求めよ．
(2) r から y までの伝達関数を $G(s)$ とおく．この $G(s)$ を求めよ．
(3) r から y までの伝達関数 $G(s)$ が安定であるための k の条件をフルビッツの安定判別法により求めよ．

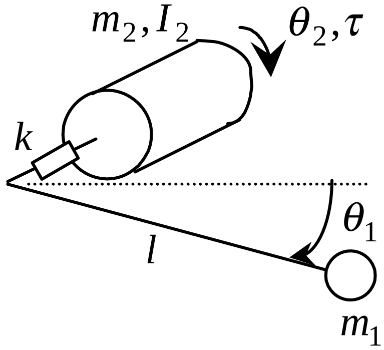

図１： 柔軟関節を有するリンク系

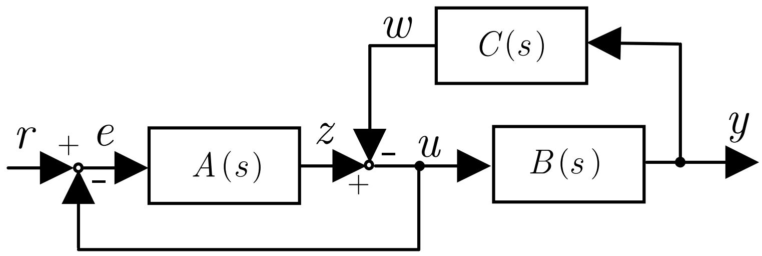

図２： ブロック線図

動的システム基礎　試験問題　略解　担当　井村

2009 年 8 月 3 日分
（受験者 54 名，最高点 100 点，平均点 80.6 点）

[1] 運動エネルギー T，位置エネルギー U は

$$T = \frac{1}{2}(m_1 l^2)\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}I_2\dot{\theta}^2$$

$$U = -m_1 g l \sin\theta + \frac{1}{2}k(\theta_2 - \theta_1)^2$$

なので，$L = T - U$ によりラグランジュの運動方程式に代入すると，次式を得る．

$$m_1 l^2 \ddot{\theta}_1 - m_1 g l \cos\theta_1 - k(\theta_2 - \theta_1) = 0, \quad I_2\ddot{\theta}_2 + k(\theta_2 - \theta_1) = \tau$$

[2]

(1) $x = [q_1\ \dot{q}_1\ q_2]^T$ とおくと，

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_1^3 \\ -x_2 + u \end{bmatrix}, \quad y = x_1$$

(2) $\dot{x} = f(x, u)$ と表現すると，$f(x_e, u_e) = 0$ より得られる．

(3)

$$\dot{\tilde{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}\tilde{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\tilde{u}, \quad \tilde{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\tilde{x}$$

[3]

(1) 動的システムの出力は現在までの入力や初期状態によって決まり，微分方程式や差分方程式によって与えられる．一方静的システムは，時刻 t での入力を時刻 t での出力に移す関数で与えられる．

(2) 線形システムの応答は，初期値応答と入力応答の和で与えられ，独立に考えることができるので，伝達関数では入力応答のみに着目しているから．

[4]

(1) $T = b/c$, $K = 1/c$．説明略．

(2) $y = \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t}$. $\zeta = 3/(2\sqrt{2}), \omega_n = \sqrt{2}, K = 1/2$.

[5]

(1) $\dot{x} = -2x + e$, $z = x$.

(2)

$$G(s) = \frac{B(s)A(s)}{1 + A(s) + B(s)C(s)} = \frac{2}{s^3 + 5s^2 + (2k+7)s + (4k+3)}$$

(3) $G(s)$ の特性多項式は $s^3 + 5s^2 + (2k+7)s + (4k+3)$ である．これよりフルビッツの安定判別より $k > -\frac{3}{4}$ のとき安定である．