

慶應義塾大学 滑川研究室セミナー

モデル低次元化 –基礎的な考え方を中心に–

石崎 孝幸 (東京工業大学)

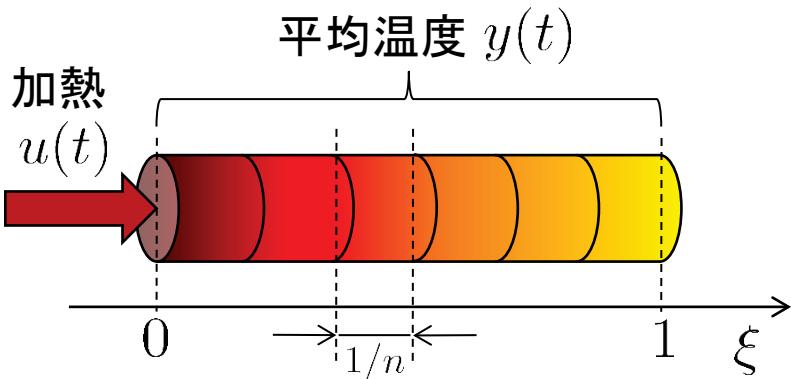


発表の構成

- ▶ はじめに: モデル低次元化とは
- ▶ パラメータマッチングに基づく低次元化
- ▶ 平衡実現の打ち切りによる低次元化
- ▶ ポジティブネットワークのクラスタ低次元化
- ▶ おわりに

導入：熱拡散システムの低次元モデリング

熱拡散システム



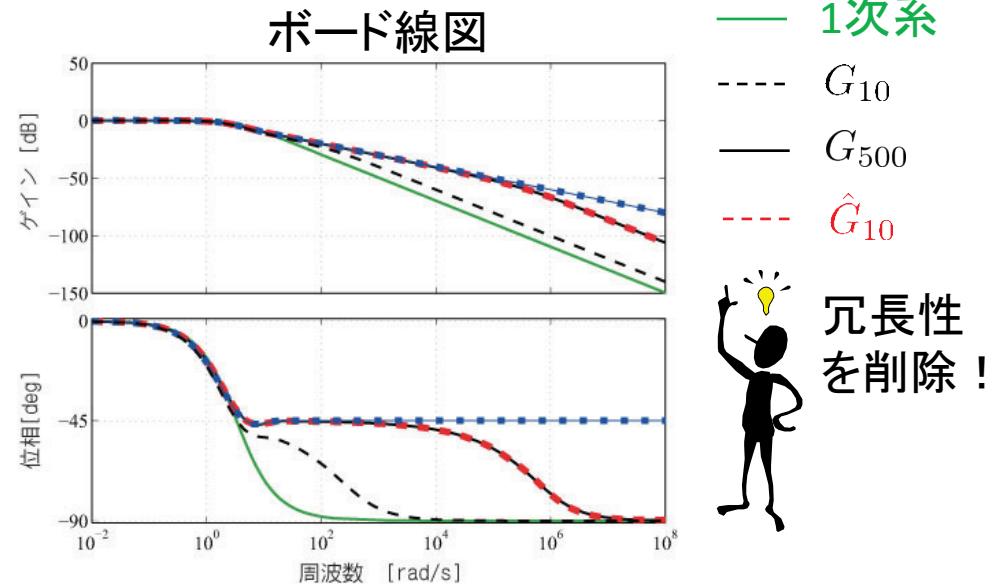
$$\begin{cases} \frac{\partial x(\xi, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 x(\xi, t)}{\partial \xi^2}, & \left. \begin{cases} x(0, t) = u(t) \\ \frac{\partial x(\xi, t)}{\partial t} \Big|_{\xi=1} = 0 \end{cases} \right. \\ y(t) = \int_0^1 x(\xi, t) d\xi \end{cases}$$

空間離散化

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

低次元近似

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u \\ \hat{y} = \hat{C}\hat{x} \end{cases}$$



無限次元

$$G_\infty(s) = \frac{\sinh(\sqrt{s})}{\sqrt{s} \cosh(\sqrt{s})}$$

n 次元

$$G_n(s) = C(sI_n - A)^{-1}B$$



\hat{n} 次元

$$\hat{G}_{\hat{n}}(s) = \hat{C}(sI_{\hat{n}} - \hat{A})^{-1}\hat{B}$$



モデル低次元化問題

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}^n$$

低次元近似

$$n \geq \hat{n}$$

$$G(s) = C(sI_n - A)^{-1}B$$

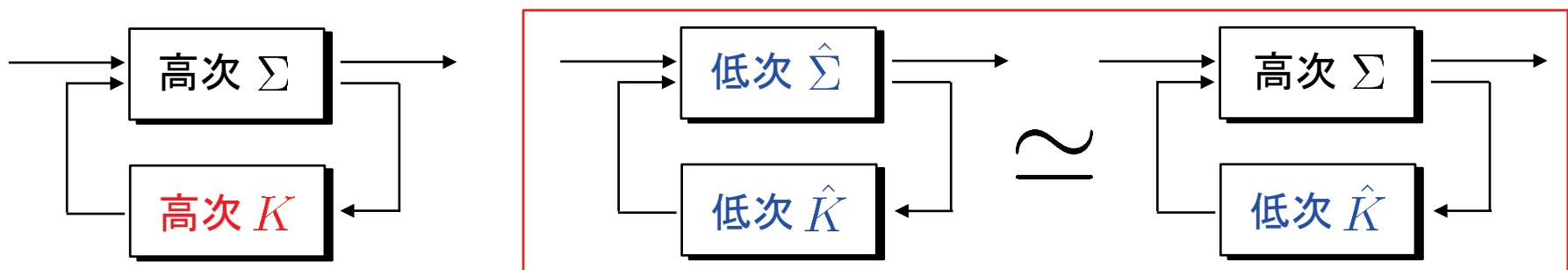
$$\hat{\Sigma} : \begin{cases} \dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u \\ \hat{y} = \hat{C}\hat{x} \end{cases} \quad \hat{x} \in \mathbb{R}^{\hat{n}}$$

$$\hat{G}(s) = \hat{C}(sI_{\hat{n}} - \hat{A})^{-1}\hat{B}$$

【問題】 与えられた Σ に対して $G(s) \simeq \hat{G}(s)$ なる $\hat{\Sigma}$ を求めよ.

低次元化の使いどころは？

- ▶ 効率的なシステム解析（数値シミュレーションなど）
- ▶ 低成本で実装可能な制御系の設計



☺良性能 ☹高コスト

☺良性能 低コスト

✓ $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ 制御: 得られるコントローラはモデルと同程度の次元



発表の構成

- ▶ はじめに: モデル低次元化とは
- ▶ パラメータマッチングに基づく低次元化
- ▶ 平衡実現の打ち切りによる低次元化
- ▶ ポジティブネットワークのクラスタ低次元化
- ▶ おわりに

パラメータマッチングに基づく低次元化

Σ のインパルス応答: $Ce^{At}B = \textcolor{red}{CB} + \textcolor{red}{CAB}\frac{t}{1!} + \textcolor{red}{CA^2B}\frac{t^2}{2!} + \dots$

✓ $G(s) = \mathcal{L}[Ce^{At}B] \simeq \mathcal{L}[\hat{C}e^{\hat{A}t}\hat{B}] = \hat{G}(s)$ マルコフパラメータ

【問題】 すべての $k \in \{1, \dots, \hat{n}\}$ に対して $\hat{C}\hat{A}^{k-1}\hat{B} = CA^{k-1}B$ となる

$\hat{A} \in \mathbb{R}^{\hat{n} \times \hat{n}}, \hat{B} \in \mathbb{R}^{\hat{n}}, \hat{C} \in \mathbb{R}^{1 \times \hat{n}}$ を求めよ.

直交射影に基づくアプローチ

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

直交射影近似

$$\hat{\Sigma} : \begin{cases} \dot{\hat{x}} = \textcolor{blue}{V}^\top A \textcolor{blue}{V} \hat{x} + \textcolor{blue}{V}^\top B u \\ \hat{y} = C \textcolor{blue}{V} \hat{x} \end{cases}$$

正規直交性

$$V \in \mathbb{R}^{n \times \hat{n}}, v_i^\top v_j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$



$\hat{C}\hat{A}^{k-1}\hat{B} = CA^{k-1}B$
を満たす $\textcolor{blue}{V}$ とは？



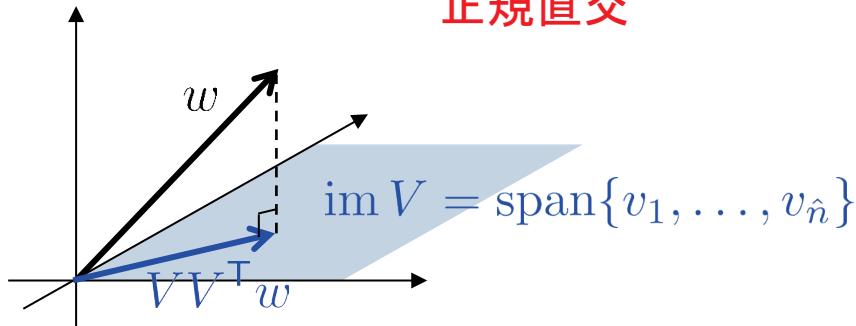
クリロフ部分空間法:

[A.C. Antoulas, S. Gugercin, etc...]

可制御・可観測部分空間への直交射影

$V^T V = I_{\hat{n}}$ なる $V \in \mathbb{R}^{n \times \hat{n}}$ に対して $VV^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ は $\text{im } V$ 上への直交射影行列

正規直交



$$w \in \text{im } V \Rightarrow VV^T w = w$$

射影しても変化しない！



【定理】

$$\text{im } V = \text{im } [B, AB, \dots, A^{\hat{n}-1}B] \text{ または } \text{im } V = \text{im } [C^T, (CA)^T, \dots, (CA^{\hat{n}-1})^T]$$

ならば、すべての $k \in \{1, \dots, \hat{n}\}$ に対して $\hat{C} \hat{A}^{k-1} \hat{B} = CA^{k-1}B$ が成り立つ。

✓ 証明: $\hat{C} \hat{B} = C V V^T B = C B$

$$\hat{C} \hat{A} \hat{B} = \hat{C} V^T A V V^T B = C V V^T A B = C A B$$

⋮



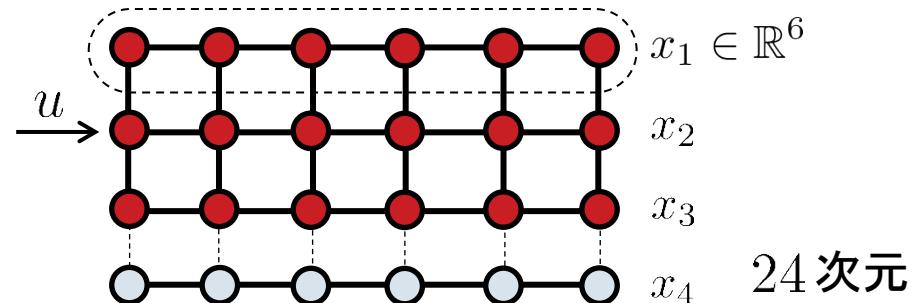
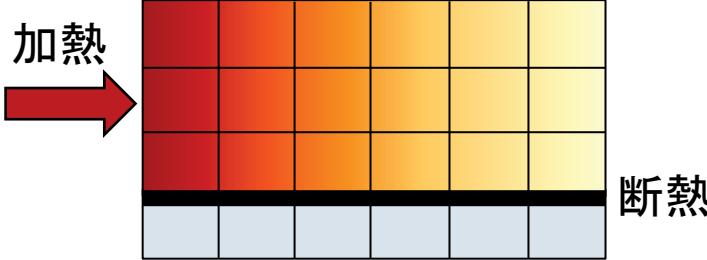
可制御性?
可観測性?



発表の構成

- ▶ はじめに: モデル低次元化とは
- ▶ パラメータマッチングに基づく低次元化
- ▶ 平衡実現の打ち切りによる低次元化
- ▶ ポジティブネットワークのクラスタ低次元化
- ▶ おわりに

低次元化と可制御性(可観測性)



完全な断熱: $x_4(t) = 0, \forall u(t)$

入力に関する対称性: $x_1(t) - x_3(t) = 0, \forall u(t)$



12 次元は
不可制御! (削除可能)

$$G(s) = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \left(sI_n - \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} = C_1(sI_{\hat{n}} - A_{11})^{-1} B_1 = \hat{G}(s)$$

厳密な低次元化

一方で...

不完全な断熱: $x_4(t) \simeq 0, \forall u(t)$

不完全な対称性: $x_1(t) - x_3(t) \simeq 0, \forall u(t)$



削除しても
大丈夫?

可制御性(可観測性)の定量的な評価が必要



可制御性・可観測性の定量的な評価指標

可制御性・可観測性グラミアン

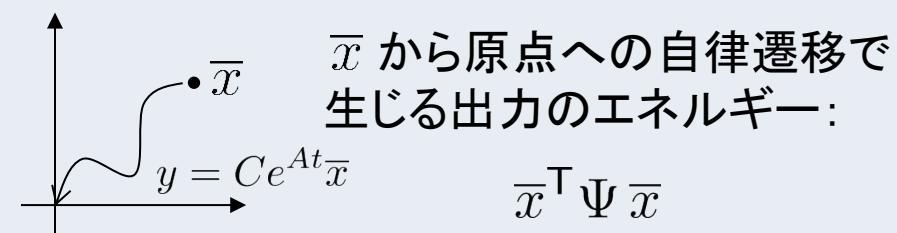
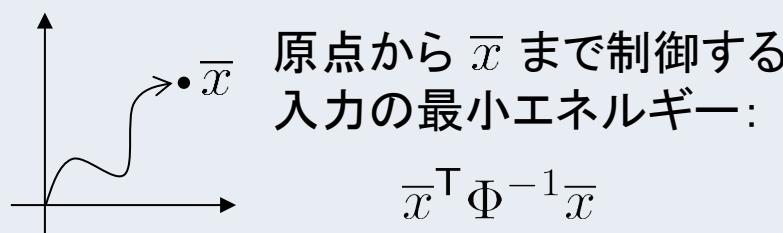
$$\Phi := \int_0^\infty e^{At} B (e^{At} B)^\top dt$$

$$\Psi := \int_0^\infty (Ce^{At})^\top C e^{At} dt$$

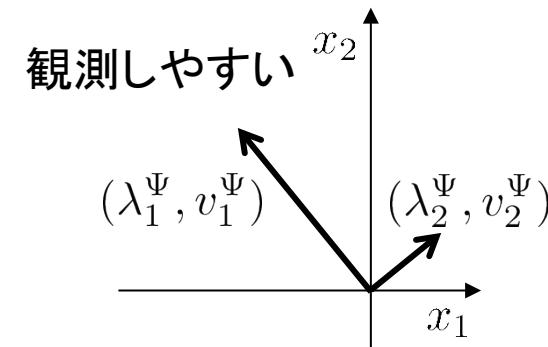
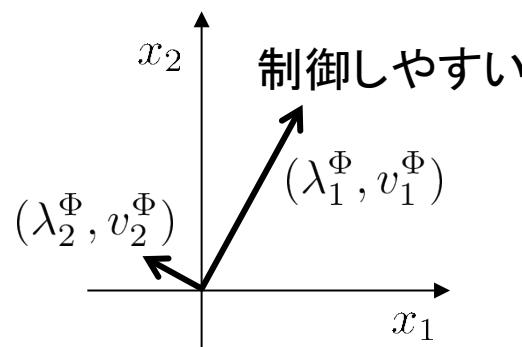
リアプロフ方程式:

$$A\Phi + \Phi A^\top + BB^\top = 0$$

$$A^\top \Psi + \Psi A + C^\top C = 0$$



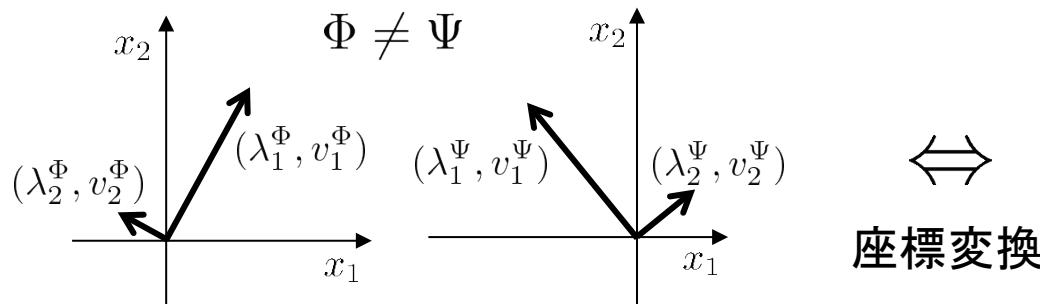
固有値・固有ベクトル:



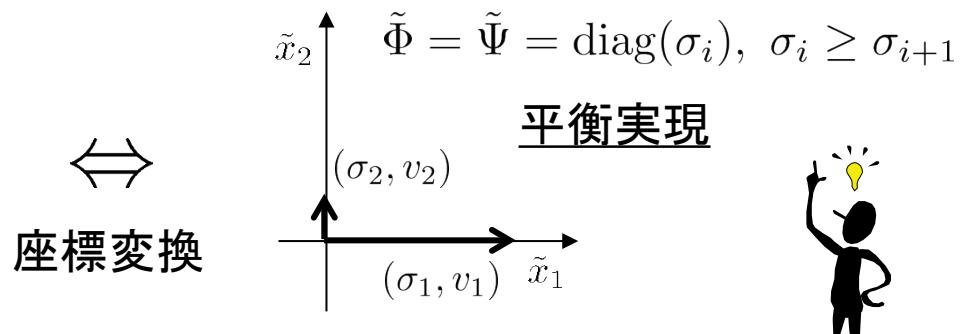
平衡実現の打ち切りによる低次元化

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \text{ の座標変換 } \tilde{x} = Sx : \tilde{\Phi} = S\Phi S^T, \quad \tilde{\Psi} = S^{-T}\Psi S^{-1}$$

【補題】 $\tilde{\Phi} = \tilde{\Psi} = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ となる $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ が存在する.



制御・観測のしやすさは方向ごとバラバラ



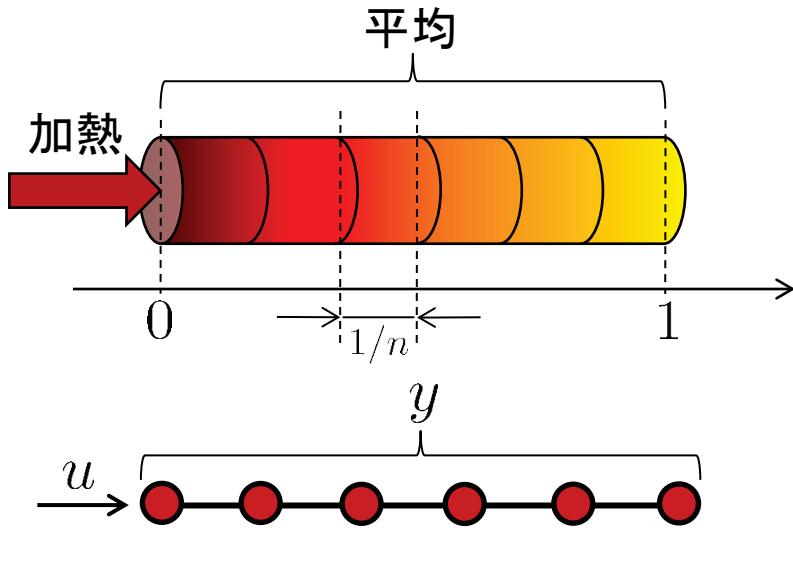
【定理】 平衡実現 $\tilde{\Sigma}$ に対して $\tilde{x}_1 \in \mathbb{R}^{\hat{n}}$ を考え, これに対応させて

$\hat{A} = \tilde{A}_{11}, \hat{B} = \tilde{B}_1, \hat{C} = \tilde{C}_1$ とする. このとき, $\hat{\Sigma}$ は安定であり

$$\|G(s) - \hat{G}(s)\|_{\mathcal{H}_\infty} \leq 2(\sigma_{\hat{n}+1} + \dots + \sigma_n) \text{ が成り立つ.}$$



再考: 熱拡散システムの低次元化



$$A = n^2 \begin{bmatrix} -2 & 1 & & \\ 1 & -2 & 1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad B = n^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

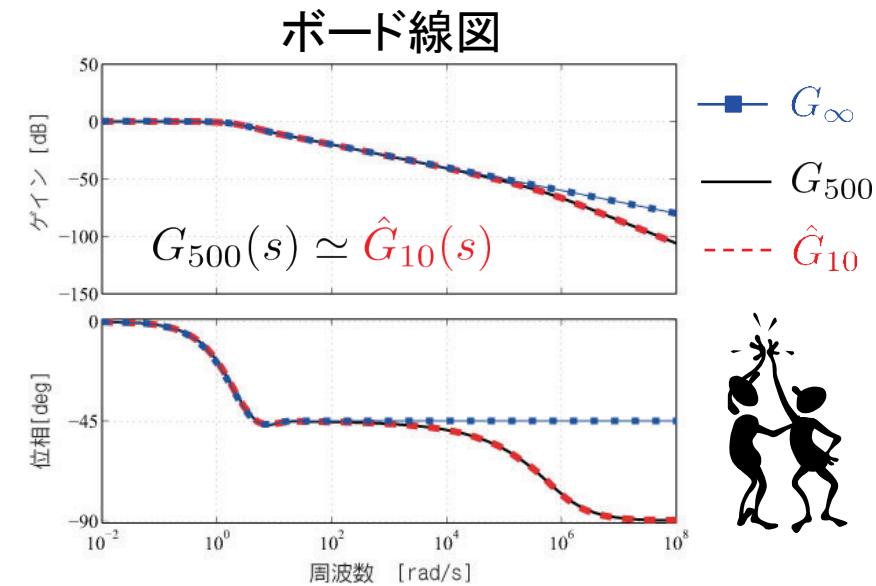
三重対角&メソラー

非負

$$C = n^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

非負

✓ ポジティブシステム: $C e^{At} B \geq 0$



$$\hat{A} = \begin{bmatrix} -5.1 & 19.0 & -33.6 & \dots \\ 19.0 & -185.0 & 478.2 & \dots \\ -33.6 & 478.2 & -1918.4 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

密行列&メソラー

$$\hat{B}^\top = \hat{C} = \begin{bmatrix} -2.0 & 4.4 & -7.0 & \dots \end{bmatrix}$$

非負

☺ $G(s) \simeq \hat{G}(s)$ ☹ 状態空間の構造を失う



発表の構成

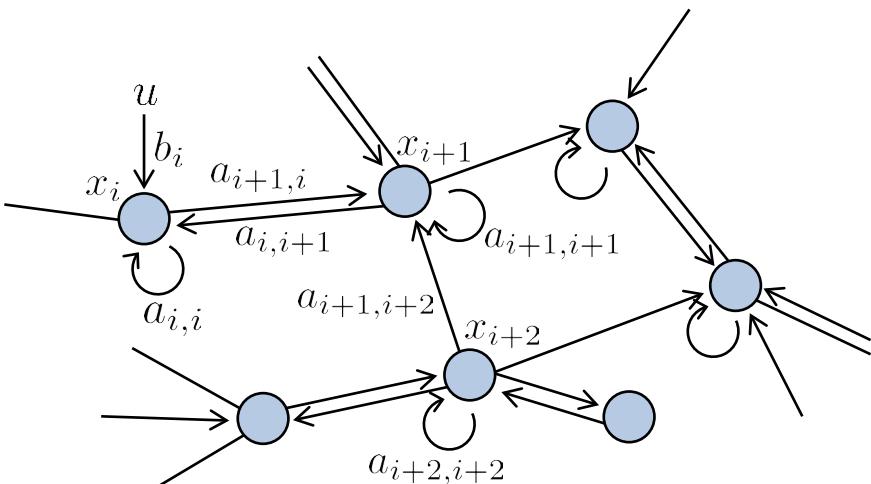
- ▶ はじめに: モデル低次元化とは
- ▶ パラメータマッチングに基づく低次元化
- ▶ 平衡実現の打ち切りによる低次元化
- ▶ ポジティブネットワークのクラスタ低次元化
- ▶ おわりに



ポジティブネットワークの低次元化

【定義】 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ がメツラーかつ $B \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{n \times m}$ のとき

$\Sigma : \dot{x} = Ax + Bu$ をポジティブネットワークと呼ぶ.



✓ 非負性: $x(t) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n, \forall u(t) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^m$

- 熱拡散システム（温度）
- コンパートメントシステム（濃度）
- マルコフ連鎖（確率）

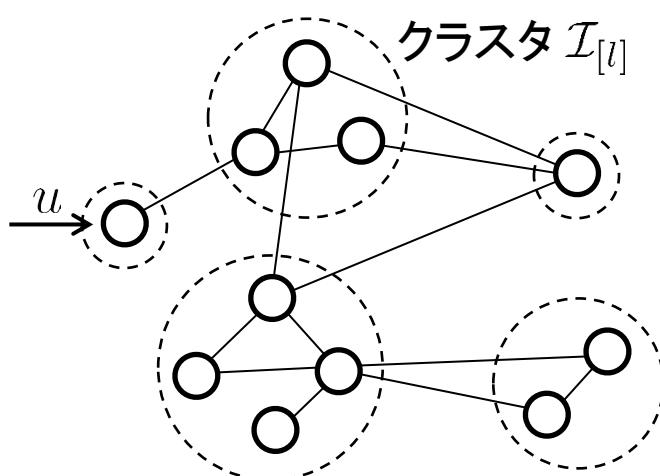


ネットワーク構造や非負性を
保存しながら低次元化？



クラスタ低次元化

$$\Sigma : \dot{x} = Ax + Bu$$



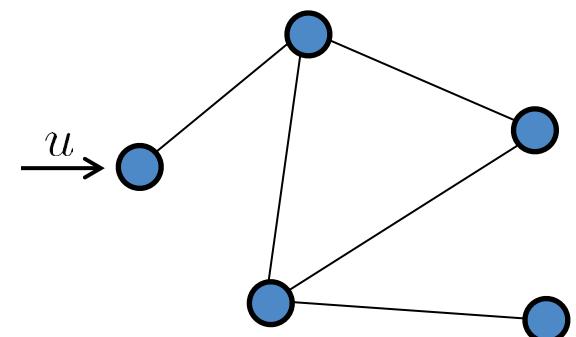
$$P = \begin{bmatrix} p_{[1]} & \dots \\ & p_{[\hat{n}]} \end{bmatrix}$$

直交射影近似

$p_{[l]}$: 非負ベクトル

$$\hat{\Sigma} : \begin{cases} \dot{\xi} = P^T AP\xi + P^T Bu \\ \hat{x} = P\xi \end{cases}$$

クラスタの集約化



クラスタ間のネットワーク構造 & 非負性を保存 😊



$x(t) \simeq \hat{x}(t)$ となる
クラスタを探すには？

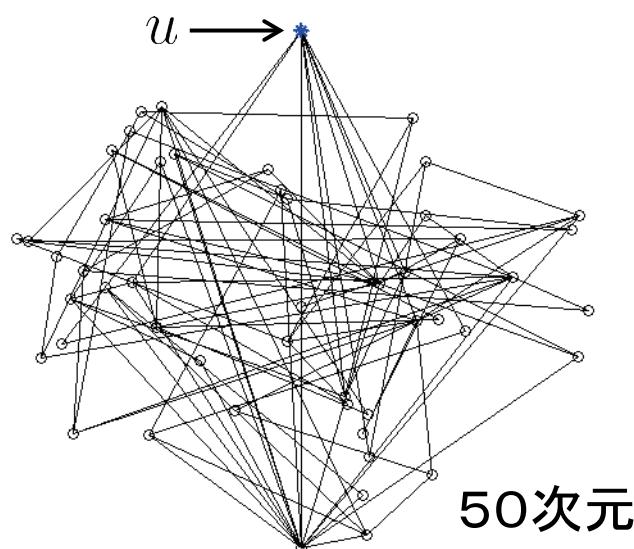
✓ 簡単のため

$$p_{[l]} = \frac{1}{\sqrt{|\mathcal{I}_{[l]}|}} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{平均化}$$



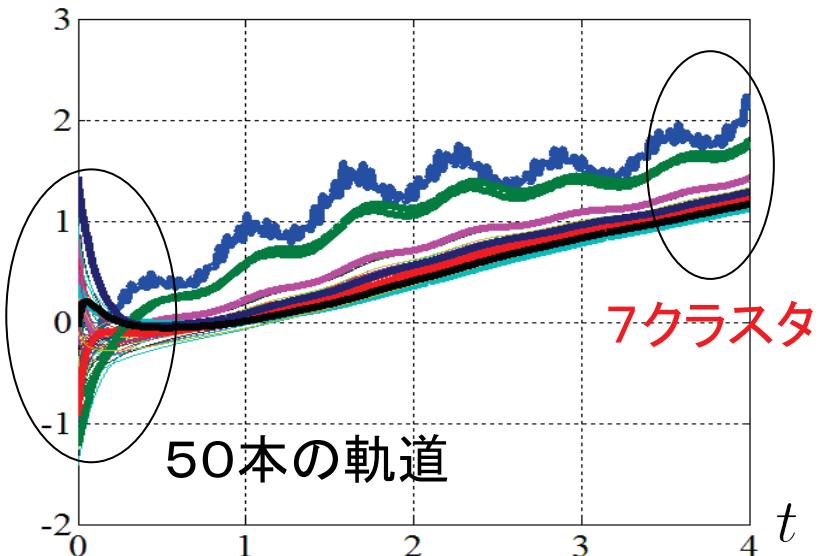
クラスタの可約性

$\Sigma : \dot{x} = Ax + Bu$ (安定)



$a_{i,j} \in [0, 1]$ はランダムに選択

ランダムな u に対する x の軌道



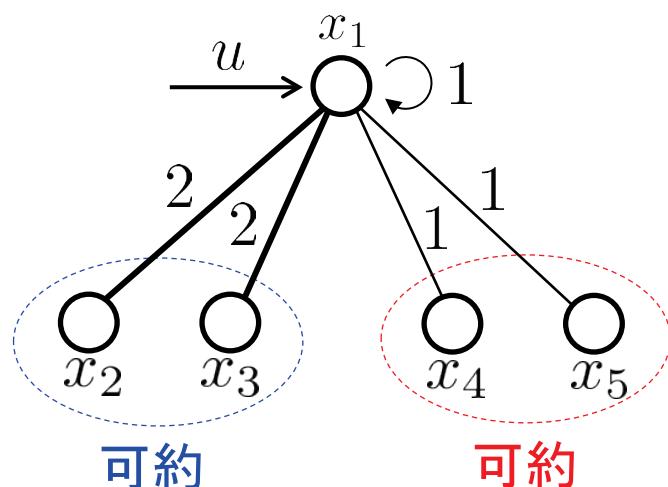
7次元に集約可能？

【定義】 すべての $i, j \in \mathcal{I}_{[l]}$ およびすべての $u(t)$ に対して

$x_i(t) = x_j(t)$ が成り立つとき、クラスタ $\mathcal{I}_{[l]}$ は可約であると呼ぶ。

可約性の判定

$$\Sigma : \dot{x} = Ax + Bu$$



可制御性グラミアン $\Phi = \int_0^\infty e^{At} B (e^{At} B)^T dt$

のコレスキーフ分解 $\Phi = \Phi^{\frac{1}{2}} \Phi^{\frac{T}{2}}$

$$\Phi^{\frac{1}{2}} = \left[\begin{array}{ccccc} 0.39 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0.21 & 0.19 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0.21 & 0.19 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0.24 & 0.18 & 0.05 & 0.00 & 0 \\ \hline 0.24 & 0.18 & 0.05 & 0.00 & 0 \end{array} \right] \quad \left. \begin{array}{l} \text{同じ} \\ \text{同じ} \end{array} \right\}$$

$$x_2(t) = x_3(t), \quad x_4(t) = x_5(t), \quad \forall u(t)$$

行ベクトルの比較により判定



【補題】 クラスタ $\mathcal{I}_{[l]}$ が可約であるための必要十分条件は

すべての $i, j \in \mathcal{I}_{[l]}$ に対して $\text{row}_i[\Phi^{\frac{1}{2}}] = \text{row}_j[\Phi^{\frac{1}{2}}]$ が成り立つことである。



定量的なクラスタの可約性

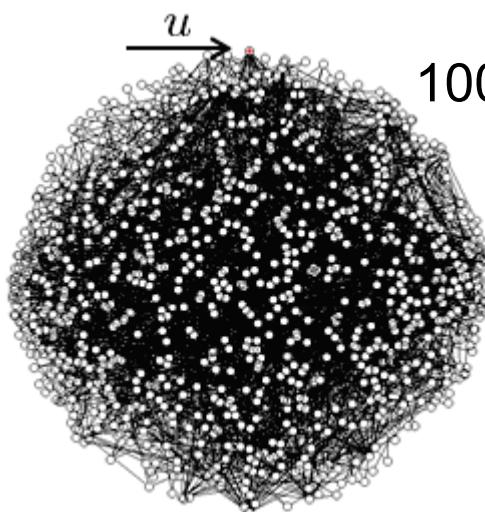
【定義】 すべての $i, j \in \mathcal{I}_{[l]}$ に対して $\left\| \text{row}_i[\Phi_{\frac{1}{2}}] - \text{row}_j[\Phi_{\frac{1}{2}}] \right\| \leq \theta$
が成り立つとき、クラスタ $\mathcal{I}_{[l]}$ は θ 可約であると呼ぶ。

【定理】 すべてのクラスタが θ 可約であるならば、 $\hat{\Sigma}$ は

$$\|G(s) - \hat{G}(s)\|_{\mathcal{H}_2} \leq \gamma \sqrt{\sum_{l=1}^{\hat{n}} |\mathcal{I}_{[l]}|(|\mathcal{I}_{[l]}| - 1)} \theta$$

精度を規定する
パラメータ

を満たす安定なポジティブネットワークである。



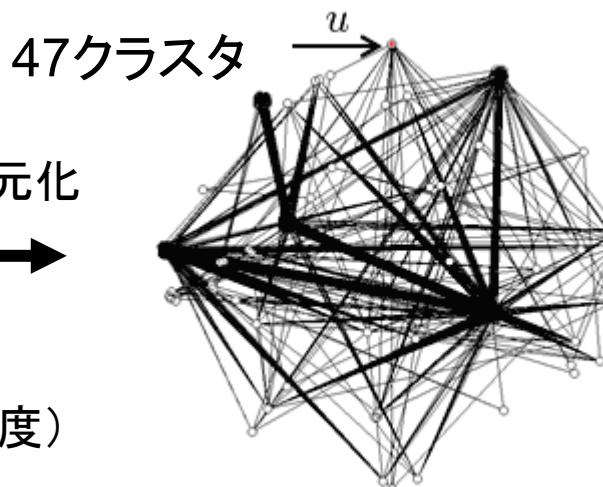
1000ノード

クラスタ低次元化



$$\theta = 1.5$$

(誤差5%程度)



47クラスタ

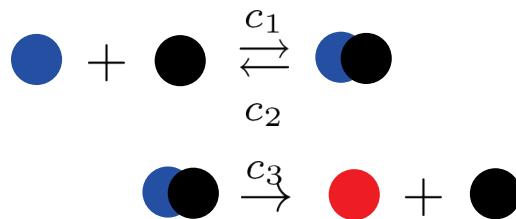
不可欠なクラスタ構造を抽出！





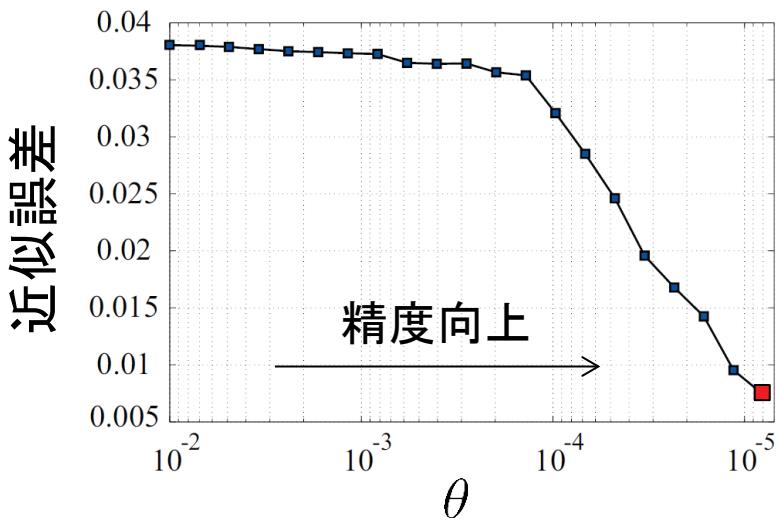
適用例：化学マスター方程式

Michaelis-Mentenシステム



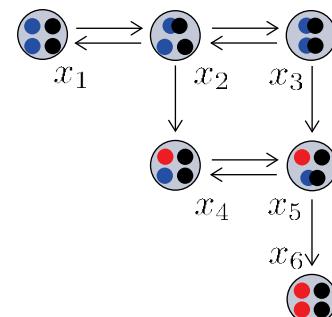
$$(c_1 = 1, c_2 = 0.01, c_3 = 3)$$

\bullet と \bullet を80個に設定



例) $t = 0$ のとき

\bullet と \bullet がふたつずつ



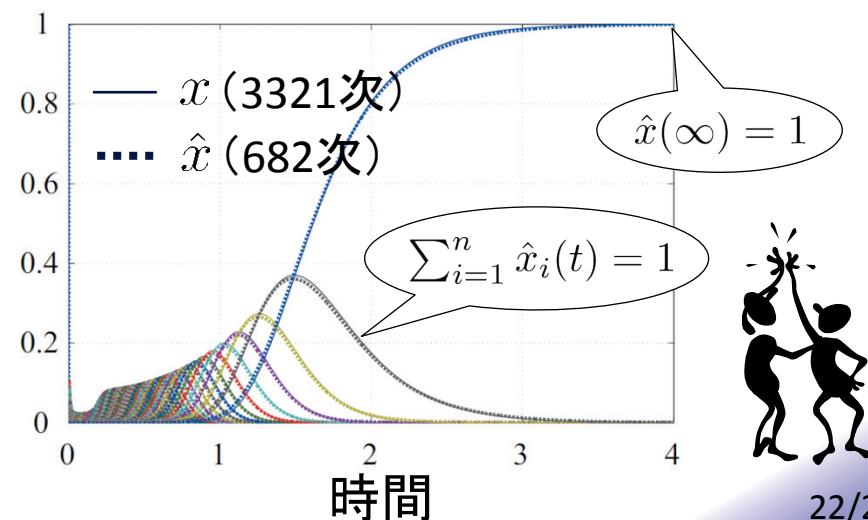
マルコフ連鎖表現

$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

✓ $\sum_{i=1}^n x_i(t) = 1, \quad x_n(\infty) = 1$

$x \in [0, 1]^n$: 各分子個数の実現確率

実現確率



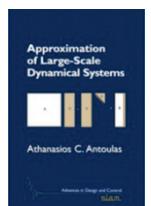


おわりに

- ▶ モデル低次元化
 - ▶ 冗長なシステムから不可欠なサブシステムを抽出するツール
 - ▶ 入出力応答(伝達関数)の近似
 - ▶ システム構造・特性(ネットワーク構造、非負性、受動性 etc...)の保存
- ▶ パラメータマッチングに基づく低次元化
- ▶ 平衡実現の打ち切りによる低次元化
- ▶ クラスタ低次元化
- ▶ 制御器・観測器の低次元化など

} [1]

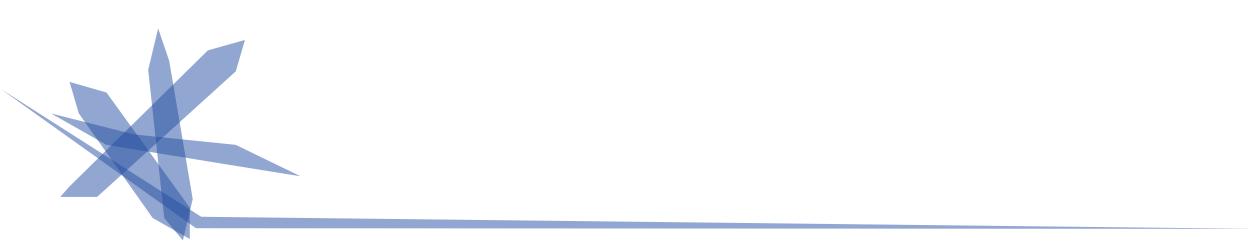
} [2]



[1] A.C. Antoulas "Approximation of large-scale dynamical systems" SIAM 2005

[2] Website: <http://www.cyb.mei.titech.ac.jp/members/ishizaki/index.html>

ご清聴ありがとうございました





付録：線形システム論基礎



動的な線形システム



静的システム: 時刻 t での出力がその時刻の入力のみによって決まる

$$y(t) = Du(t) \quad \checkmark D \text{ は定数}$$

動的システム: 時刻 t での出力がそれ以前の入力にも依存して決まる

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

時間に関する微分方程式
= 時間変化の方程式



✓ 入出力 $u(t), y(t)$ がスカラ、内部状態 $x(t)$ が n 次元ベクトルとすると

$$\dot{x} = A x + B u$$

$n \times n$ $n \times 1$

$$y = C x + D u$$

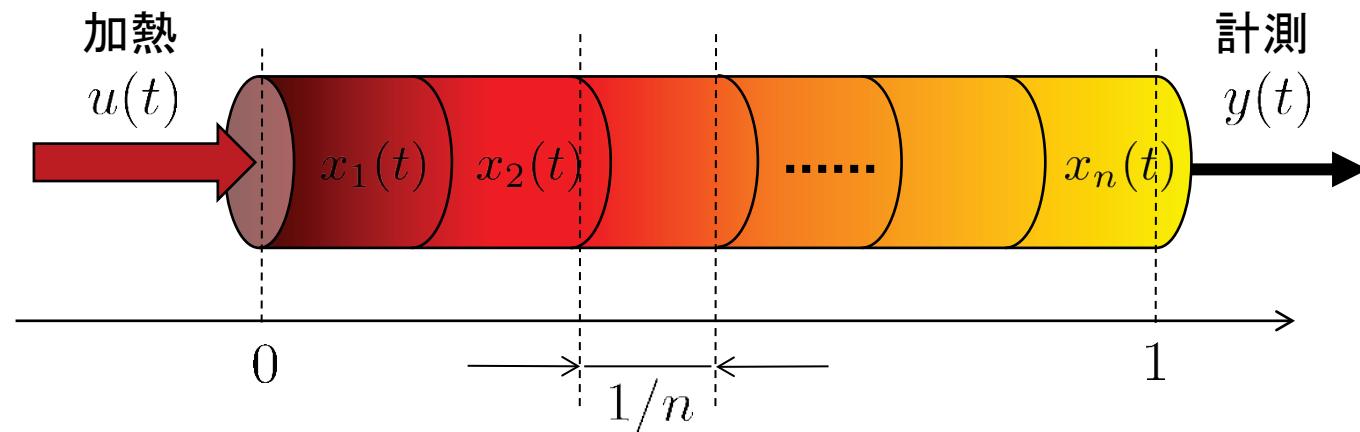
$1 \times n$ 1×1



状態の次元: システム表現の複雑度と精度

熱拡散システム

状態変数 $x_i(t)$: 第 i 要素の温度



$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = n^2 \begin{bmatrix} -2 & 1 & & \\ 1 & -2 & 1 & \\ \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 1 & -1 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + n^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u \quad y = n^{-1} \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

A *B* *C*

状態ベクトル $x(t)$ の次元は システムの表現精度 に関係





安定性と座標変換

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

状態(微分)方程式の解

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

t 以前の入力の
畳み込み積分

【定義】 入力を $u(t) \equiv 0$ とする。任意の初期状態 x_0 に対して

$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ であるとき、システム Σ は**安定**であるという。

【事実】 安定性の必要十分条件は A のすべての固有値の実部が負。

座標変換 $\tilde{x}(t) = Tx(t)$ を Σ に適用 $\implies \tilde{\Sigma} : \begin{cases} \dot{\tilde{x}} = TAT^{-1}\tilde{x} + TBu \\ y = CT^{-1}\tilde{x} + Du \end{cases}$

相似変換(固有値不变)

【事実】 システムの安定性と入出力応答は、座標変換に関して不変。

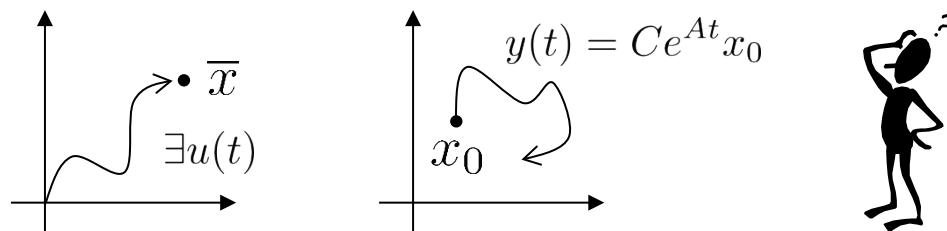


可制御性と可観測性

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

【定義】 原点 $x(0) = 0$ から任意の状態 $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ に到達する入力 $u(t)$ が存在するとき、システム Σ は**可制御**であるという。

【定義】 入力を $u(t) \equiv 0$ とする。出力 $y(t)$ を観測することによって初期状態 $x(0) = x_0$ を一意に決定できるとき、 Σ は**可観測**であるという。



可制御性と可観測性は
違う概念。条件は？

【事実】 可制御性と可観測性の必要十分条件は

$[B, AB, \dots, A^{n-1}B]$ と $[C^\top, (CA)^\top, \dots, (CA^{n-1})^\top]$ がそれぞれフルランク。

✓ (C, A) が可観測 $\Rightarrow (A^\top, C^\top)$ が可制御 **双対性**



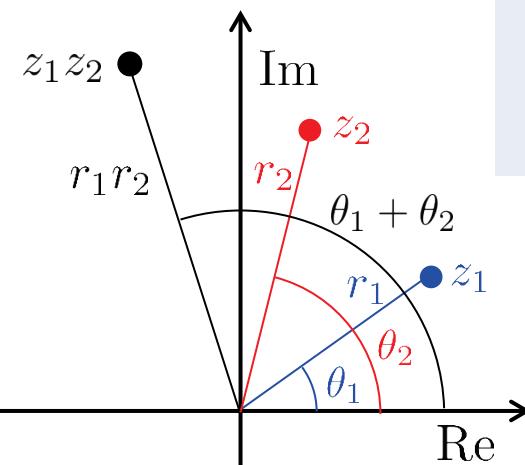
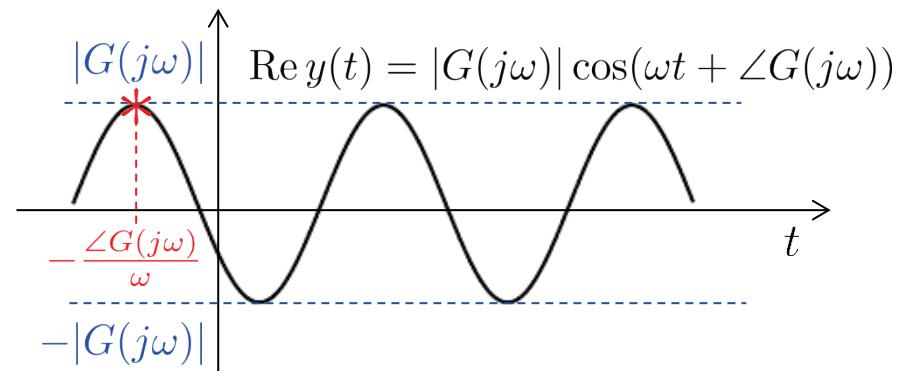
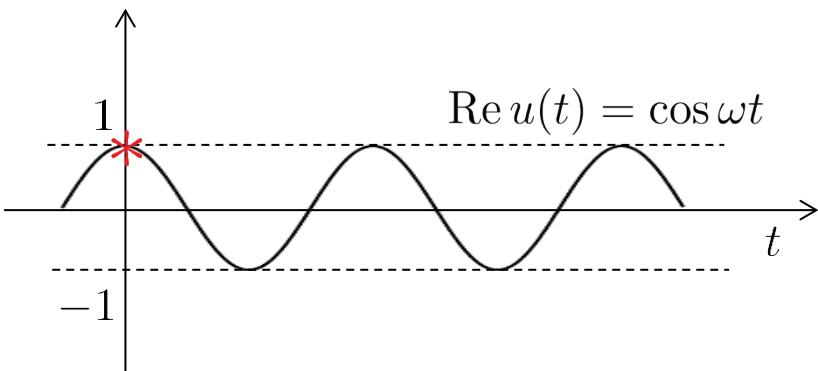
システムの周波数応答

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

周波数 ω の(複素)正弦波入力 $u(t) = e^{j\omega t}$

$$G(j\omega)$$

\implies 同じ周波数の正弦波出力 $y(t) = [C(j\omega I - A)^{-1}B + D]u(t)$



振幅変化 $\left| \frac{y(t)}{u(t)} \right| = |G(j\omega)|$ 位相変化 $\angle y(t) - \angle u(t) = \angle G(j\omega)$



極座標表示 $z = re^{j\theta}$ $\begin{cases} r = |z| \\ \theta = \angle z := \tan^{-1} \frac{\text{Im } z}{\text{Re } z} \end{cases}$

$|z_1 z_2| = r_1 r_2$ $\angle z_1 z_2 = \angle z_1 + \angle z_2$

伝達関数に基づく入出力応答の大きさの指標

伝達関数 $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$

= インパルス応答 $y(t) = Ce^{At}B + D\delta(t)$ のラプラス変換

\mathcal{H}_∞ -ノルム (ピークゲイン)

$$\|G(s)\|_{\mathcal{H}_\infty} := \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \|G(j\omega)\|$$

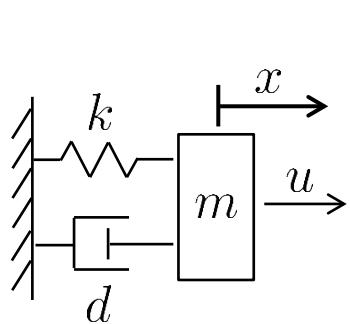
\mathcal{H}_2 -ノルム (2乗積分ゲイン)

$$\|G(s)\|_{\mathcal{H}_2} := \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \|G(j\omega)\|_F^2 d\omega}$$

出力の大きさを測る指標

ボード線図

例) バネ・マス・ダンパ系



$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{d}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

